CS (MAIN) EXAM, 2010

Sl. No. 127

C–DTN–K–NUA

MATHEMATICS

Paper—I

Time Allowed : Three Hours	Maximum Marks : 300

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.

Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

Candidates should attempt Question Nos. ***1*** *and* ***5*** *which are compulsory, and any* ***three*** *of the remaining questions selecting at least* ***one*** *question from each Section.*

The number of marks carried by each question is indicated at the end of the question.

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols/notations carry their usual meanings, unless otherwise indicated.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है।

Section—A

1. Attempt any *five* of the following :

(a) If λ_1, λ_2, λ_3 are the eigenvalues of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 26 & -2 & 2 \\ 2 & 21 & 4 \\ 4 & 2 & 28 \end{pmatrix}$$

show that

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \leqq \sqrt{1949}$$ 12

(b) What is the null space of the differentiation transformation

$$\frac{d}{dx} : P_n \to P_n$$

where P_n is the space of all polynomials of degree $\leqq n$ over the real numbers? What is the null space of the second derivative as a transformation of P_n? What is the null space of the kth derivative? 12

(c) A twice-differentiable function $f(x)$ is such that $f(a) = 0 = f(b)$ and $f(c) > 0$ for $a < c < b$. Prove that there is at least one point ξ, $a < \xi < b$, for which $f''(\xi) < 0$. 12

(d) Does the integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$ exist? If so, find its value. 12

खण्ड—क

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** के उत्तर दीजिए :

(क) यदि λ_1, λ_2, λ_3 आव्यूह

$$A = \begin{pmatrix} 26 & -2 & 2 \\ 2 & 21 & 4 \\ 4 & 2 & 28 \end{pmatrix}$$

के अभिलक्षणिक मान हैं, तो दिखाइए कि

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \leqq \sqrt{1949}$$ 12

(ख) अवकलन रूपांतरण

$$\frac{d}{dx} : P_n \to P_n$$

की शून्य समष्टि, जहाँ कि P_n वास्तविक संख्याओं पर घात $\leqq n$ के सभी बहुपदों की समष्टि है, क्या है? P_n के रूपांतरण के रूप में द्वितीय अवकलज की शून्य समष्टि क्या है? k वें अवकलज की शून्य समष्टि क्या है? 12

(ग) एक दो बार अवकलनीय फलन $f(x)$ ऐसा है कि $a < c < b$ के लिए $f(a) = 0 = f(b)$ और $f(c) > 0$ है। सिद्ध कीजिए कि कम-से-कम एक बिन्दु ξ, $a < \xi < b$, ऐसा है जिसके लिए $f''(\xi) < 0$. 12

(घ) क्या समाकल $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$ विद्यमान होता है? यदि ऐसा है, तो इसका मान ज्ञात कीजिए। 12

(e) Show that the plane $x + y - 2z = 3$ cuts the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 2$ in a circle of radius 1 and find the equation of the sphere which has this circle as a great circle. 12

(f) Show that the function

$$f(x) = [x^2] + |x - 1|$$

is Riemann integrable in the interval [0, 2], where $[\alpha]$ denotes the greatest integer less than or equal to α. Can you give an example of a function that is not Riemann integrable on [0, 2]? Compute $\int_0^2 f(x)\, dx$, where $f(x)$ is as above. 12

2. (a) Let $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Find the unique linear transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ so that M is the matrix of T with respect to the basis

$$\beta = \{v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (1, 1, 0),\ v_3 = (1, 1, 1)\}$$

of $\mathbb{R}^3$ and

$$\beta' = \{w_1 = (1, 0),\ w_2 = (1, 1)\}$$

of $\mathbb{R}^2$. Also find $T(x, y, z)$. 20

(b) Show that a box (rectangular parallelopiped) of maximum volume V with prescribed surface area is a cube. 20

(c) Show that the plane $3x + 4y + 7z + \frac{5}{2} = 0$ touches the paraboloid $3x^2 + 4y^2 = 10z$ and find the point of contact. 20

(ङ) दिखाइए कि समतल $x+y-2z=3$ गोलक $x^2+y^2+z^2-x+y=2$ को त्रिज्या 1 के वृत्त में काटता है और उस गोलक का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें यह वृत्त एक वृहत् वृत्त होता है। 12

(च) दिखाइए कि फलन

$$f(x)=[x^2]+|x-1|$$

अन्तराल [0, 2] में रीमान-समाकलनीय है, जहाँ $[\alpha]$, α से कम या इसके समान महत्तम पूर्णांक निर्दिष्ट करता है। क्या आप एक ऐसे फलन का उदाहरण दे सकते हैं जो कि [0, 2] पर रीमान-समाकलनीय नहीं है? $\int_0^2 f(x)\,dx$ का परिकलन कीजिए, जहाँ $f(x)$ उपर्युक्त जैसा है। 12

2. (क) मान लीजिए $M=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ है। अद्वितीय रैखिक रूपांतरण $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ज्ञात कीजिए, जिससे कि M $\mathbb{R}^2$ के

$$\beta'=\{w_1=(1, 0),\ w_2=(1, 1)\}$$

और $\mathbb{R}^3$ के

$$\beta=\{v_1=(1, 0, 0),\ v_2=(1, 1, 0),\ v_3=(1, 1, 1)\}$$

आधार के साथ T का आव्यूह है। $T(x, y, z)$ को भी ज्ञात कीजिए। 20

(ख) दिखाइए कि नियत पृष्ठीय क्षेत्रफल वाले अधिकतम आयतन V का एक संदूक (आयतफलकी समांतरषट्फलक) एक घन होता है। 20

(ग) दिखाइए कि समतल $3x+4y+7z+\frac{5}{2}=0$ परवलयज $3x^2+4y^2=10z$ को स्पर्श करता है और स्पर्श-बिन्दु ज्ञात कीजिए। 20

3\. *(a)* Let A and B be $n \times n$ matrices over reals. Show that $I - BA$ is invertible if $I - AB$ is invertible. Deduce that AB and BA have the same eigenvalues. 20

(b) Let D be the region determined by the inequalities $x > 0$, $y > 0$, $z < 8$ and $z > x^2 + y^2$. Compute

$$\iiint_D 2x \, dx \, dy \, dz$$ 20

(c) Show that every sphere through the circle

$$x^2 + y^2 - 2ax + r^2 = 0, \quad z = 0$$

cuts orthogonally every sphere through the circle

$$x^2 + z^2 = r^2, \quad y = 0$$ 20

4\. *(a)* *(i)* In the n-space $\mathbb{R}^n$, determine whether or not the set

$$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \cdots, e_{n-1} - e_n, e_n - e_1\}$$

is linearly independent.

(ii) Let T be a linear transformation from a vector space V over reals into V such that $T - T^2 = I$. Show that T is invertible. 20

(b) If $f(x, y)$ is a homogeneous function of degree n in x and y, and has continuous first- and second-order partial derivatives, then show that

(i) $$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

3. (क) माना कि A और B वास्तविक संख्याओं पर $n \times n$ आव्यूह हैं। दिखाइए कि $I - BA$ व्युत्क्रमणीय है, यदि $I - AB$ व्युत्क्रमणीय है। निगमन कीजिए कि AB और BA के समान अभिलक्षणिक मान हैं। 20

(ख) माना कि D असमिकाओं $x > 0$, $y > 0$, $z < 8$ और $z > x^2 + y^2$ द्वारा निर्धारित प्रदेश है। $\iiint\limits_D 2x\, dx\, dy\, dz$ का परिकलन कीजिए। 20

(ग) दिखाइए कि वृत्त

$$x^2 + y^2 - 2ax + r^2 = 0, \quad z = 0$$

से होता हुआ हरेक गोलक वृत्त

$$x^2 + z^2 = r^2, \; y = 0$$

से होते हुए हरेक गोलक को लाम्बिकतः काटता है। 20

4. (क) *(i)* n-विम समष्टि $\mathbb{R}^n$ में तय कीजिए कि समुच्चय

$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \cdots, e_{n-1} - e_n, e_n - e_1\}$

एकघाततः स्वतंत्र है या नहीं।

(ii) माना कि T वास्तविक संख्याओं पर एक सदिश समष्टि V से V में एक ऐसा रैखिक रूपांतरण है कि $T - T^2 = I$. दिखाइए कि T व्युत्क्रमणीय है। 20

(ख) यदि $f(x, y)$, x और y में n घात का एक समघात फलन है और इसके संतत प्रथम तथा द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज हैं, तो दिखाइए कि

(i) $x \dfrac{\partial f}{\partial x} + y \dfrac{\partial f}{\partial y} = nf$

(ii) $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
$= n(n-1)f$ 20

(c) Find the vertices of the skew quadrilateral formed by the four generators of the hyperboloid

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 49$$

passing through (10, 5, 1) and (14, 2, − 2). 20

Section—B

5. Attempt any *five* of the following :

(a) Consider the differential equation

$$y' = \alpha x, \quad x > 0$$

where α is a constant. Show that—

(i) if $\phi(x)$ is any solution and $\psi(x) = \phi(x) e^{-\alpha x}$, then $\psi(x)$ is a constant;

(ii) if $\alpha < 0$, then every solution tends to zero as $x \to \infty$. 12

(b) Show that the differential equation

$$(3y^2 - x) + 2y(y^2 - 3x)y' = 0$$

admits an integrating factor which is a function of $(x + y^2)$. Hence solve the equation. 12

(ii) $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$= n(n-1)f$ 20

(ग) (10, 5, 1) और (14, 2, – 2) से गुजरते हुए अतिपरवलयज

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 49$$

के चार जनकों द्वारा बने हुए विषमतलीय चतुर्भुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए। 20

खण्ड—ख

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** के उत्तर दीजिए :

(क) अवकल समीकरण

$$y' = \alpha x, \quad x > 0$$

जहाँ α एक अचर है, पर विचार कीजिए। दिखाइए कि—

(i) यदि $\phi(x)$ कोई एक हल है और $\psi(x) = \phi(x) e^{-\alpha x}$, तो $\psi(x)$ एक अचर है;

(ii) यदि $\alpha < 0$, तो हरेक हल शून्य की ओर प्रवृत्त होता है जैसे ही $x \to \infty$. 12

(ख) दिखाइए कि अवकल समीकरण

$$(3y^2 - x) + 2y(y^2 - 3x)y' = 0$$

का एक समाकलन गुणक होता है जो कि $(x + y^2)$ का एक फलन है। अतः समीकरण को हल कीजिए। 12

(c) Find κ / τ for the curve

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$$ 12

(d) If v_1, v_2, v_3 are the velocities at three points A, B, C of the path of a projectile, where the inclinations to the horizon are α, $\alpha - \beta$, $\alpha - 2\beta$ and if t_1, t_2 are the times of describing the arcs AB, BC respectively, prove that

$$v_3 t_1 = v_1 t_2 \text{ and } \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} = \frac{2\cos\beta}{v_2}$$ 12

(e) Find the directional derivative of

$$f(x, y) = x^2 y^3 + xy$$

at the point (2, 1) in the direction of a unit vector which makes an angle of $\pi/3$ with the x-axis. 12

(f) Show that the vector field defined by the vector function

$$\vec{V} = xyz\,(yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k})$$

is conservative. 12

6. (a) Verify that

$$\frac{1}{2}(Mx + Ny)\,d(\log_e(xy)) + \frac{1}{2}(Mx - Ny)\,d(\log_e(\tfrac{x}{y})) = M\,dx + N\,dy$$

Hence show that—

(i) if the differential equation $M\,dx + N\,dy = 0$ is homogeneous, then $(Mx + Ny)$ is an integrating factor unless $Mx + Ny \equiv 0$;

(ग) वक्र

$$\vec{r}(t) = a\cos t\ \vec{i} + a\sin t\ \vec{j} + bt\ \vec{k}$$

के लिए κ / τ ज्ञात कीजिए। 12

(घ) यदि v_1, v_2, v_3 एक प्रक्षेप्य के पथ के तीन बिन्दुओं A, B, C पर वेग हैं, जहाँ क्षितिज से आनतियाँ α, $\alpha - \beta$, $\alpha - 2\beta$ हैं और यदि t_1, t_2 क्रमशः चाप AB, BC के निर्माण करने के समय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$v_3 t_1 = v_1 t_2 \text{ और } \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} = \frac{2\cos\beta}{v_2}$$ 12

(ङ) एक मात्रक सदिश की, जो x-अक्ष के साथ $\pi / 3$ का कोण बनाता है, दिशा में बिन्दु (2, 1) पर

$$f(x, y) = x^2 y^3 + xy$$

के दिक्-अवकलज को ज्ञात कीजिए। 12

(च) दिखाइए कि सदिश फलन

$$\vec{V} = xyz\,(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k})$$

द्वारा परिभाषित सदिश क्षेत्र संरक्षी होता है। 12

6. (क) सत्यापन कीजिए कि

$$\frac{1}{2}(Mx + Ny)\, d(\log_e(xy)) + \frac{1}{2}(Mx - Ny)\, d(\log_e(\tfrac{x}{y})) = M\,dx + N\,dy$$

अतः दिखाइए कि—

(i) यदि अवकल समीकरण $M\,dx + N\,dy = 0$ समघात है, तो $(Mx + Ny)$ एक समाकलन गुणक है जब तक $Mx + Ny \equiv 0$ नहीं है;

(ii) if the differential equation $M\,dx + N\,dy = 0$ is not exact but is of the form

$$f_1(xy)\,y\,dx + f_2(xy)\,x\,dy = 0$$

then $(Mx - Ny)^{-1}$ is an integrating factor unless $Mx - Ny \equiv 0$. 20

(b) A particle slides down the arc of a smooth cycloid whose axis is vertical and vertex lowest. Prove that the time occupied in falling down the first half of the vertical height is equal to the time of falling down the second half. 20

(c) Prove that

$$\operatorname{div}(f\vec{V}) = f(\operatorname{div}\vec{V}) + (\operatorname{grad} f)\cdot\vec{V}$$

where f is a scalar function. 20

7. (a) Show that the set of solutions of the homogeneous linear differential equation

$$y' + p(x)y = 0$$

on an interval $I = [a, b]$ forms a vector subspace W of the real vector space of continuous functions on I. What is the dimension of W? 20

(b) A particle moves with a central acceleration $\mu(r^5 - 9r)$, being projected from an apse at a distance $\sqrt{3}$ with velocity $3\sqrt{(2\mu)}$. Show that its path is the curve $x^4 + y^4 = 9$. 20

(ii) यदि अवकल समीकरण $M\,dx + N\,dy = 0$ बिल्कुल ठीक नहीं है परन्तु

$$f_1(x\,y)\,y\,dx + f_2(x\,y)\,x\,dy = 0$$

के रूप में है, तो $(Mx - Ny)^{-1}$ एक समाकलन गुणक है जब तक $Mx - Ny \equiv 0$ नहीं है। 20

(ख) एक कण एक चिकने चक्रज के चाप की ओर नीचे सरकता है जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है और शीर्ष सबसे नीचे की ओर है। सिद्ध कीजिए कि ऊर्ध्वाधर ऊँचाई के प्रथम आधे तक नीचे गिरने में लगा समय, दूसरे आधे तक नीचे गिरने में लगे समय के बराबर है। 20

(ग) सिद्ध कीजिए कि

$$\text{div}\,(f\,\vec{V}) = f(\text{div}\,\vec{V}) + (\text{grad}\,f)\cdot\vec{V}$$

जहाँ f एक अदिश फलन है। 20

7. (क) दिखाइए कि एक अंतराल $I = [a, b]$ पर समघात रैखिक अवकल समीकरण

$$y' + p(x)y = 0$$

के हलों के समुच्चय, I पर संतत फलनों के वास्तविक सदिश समष्टि के एक सदिश उपसमष्टि W को बनाता है। W की विमा क्या है? 20

(ख) दूरी $\sqrt{3}$ पर एक स्तब्धिका से वेग $3\sqrt{(2\mu)}$ के साथ प्रक्षेपित किये जाने पर एक कण केन्द्रीय त्वरण $\mu(r^5 - 9r)$ के साथ चलता है। दिखाइए कि इसका पथ वक्र $x^4 + y^4 = 9$ है। 20

(c) Use the divergence theorem to evaluate

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

where $\vec{V} = x^2 z \vec{i} + y \vec{j} - xz^2 \vec{k}$ and S is the boundary of the region bounded by the paraboloid $z = x^2 + y^2$ and the plane $z = 4y$. 20

8. (a) Use the method of undetermined coefficients to find the particular solution of

$$y'' + y = \sin x + (1 + x^2) e^x$$

and hence find its general solution. 20

(b) A solid hemisphere is supported by a string fixed to a point on its rim and to a point on a smooth vertical wall with which the curved surface of the hemisphere is in contact. If θ and ϕ are the inclinations of the string and the plane base of the hemisphere to the vertical, prove by using the principle of virtual work that

$$\tan \phi = \frac{3}{8} + \tan \theta$$ 20

(c) Verify Green's theorem for

$$e^{-x} \sin y \, dx + e^{-x} \cos y \, dy$$

the path of integration being the boundary of the square whose vertices are $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$ and $(0, \pi/2)$. 20

(ग) $\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA$ का मान निकालने के लिए अपसरण प्रमेय का उपयोग कीजिए, जहाँ $\vec{V} = x^2 z\vec{i} + y\vec{j} - xz^2\vec{k}$ और S परवलयज $z = x^2 + y^2$ तथा समतल $z = 4y$ से परिबद्ध प्रदेश की परिसीमा है। 20

8. (क) $y'' + y = \sin x + (1 + x^2)e^x$ का विशेष हल ज्ञात करने के लिए अनिर्धारित गुणांक विधि का उपयोग कीजिए और फिर इसका व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 20

(ख) एक ठोस गोलार्ध, अपनी ही हाल पर एक बिन्दु से बँधी हुई डोरी से और एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर एक बिन्दु से जिस पर गोलार्ध का वक्र पृष्ठ संपर्क में है, थमा हुआ है। यदि θ और ϕ डोरी और गोलार्ध के समतल आधार के ऊर्ध्वाधर से आनति हैं, तो कल्पित कार्य के सिद्धान्त का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि

$$\tan\phi = \frac{3}{8} + \tan\theta$$ 20

(ग) वर्ग, जिसके शीर्ष $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$ और $(0, \pi/2)$ हैं, की परिसीमा को समाकलन का पथ लेते हुए $e^{-x}\sin y\, dx + e^{-x}\cos y\, dy$ के लिए ग्रीन-प्रमेय का सत्यापन कीजिए। 20

★ ★ ★

C–DTN–K–NUA

गणित

प्रश्न-पत्र—I

समय : तीन घण्टे

पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

प्रत्येक प्रश्न के लिए नियत अंक प्रश्न के अंत में दिए गए हैं।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीक/संकेत प्रचलित अर्थों में प्रयुक्त हैं, अन्यथा निर्दिष्ट हैं।

Note : English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.