

Serial No.

0407

C-DTN-J-NUB

MATHEMATICS

Paper—II

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 300

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.

Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

*Candidates should attempt Questions 1 and 5 which are compulsory, and any **three** of the remaining questions selecting at least **one** question from each Section.*

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols and notations carry usual meaning, unless otherwise indicated.

All questions carry equal marks.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है ।

SECTION—A

1. Attempt any **FIVE** of the following : (12×5=60)

(a) If \mathbb{R} is the set of real numbers and \mathbb{R}_+ is the set of positive real numbers, show that \mathbb{R} under addition $(\mathbb{R}, +)$ and \mathbb{R}_+ under multiplication (\mathbb{R}_+, \cdot) are isomorphic. Similarly if \mathbb{Q} is the set of rational numbers and \mathbb{Q}_+ the set of positive rational numbers, are $(\mathbb{Q}, +)$ and (\mathbb{Q}_+, \cdot) isomorphic? Justify your answer. 4+8=12

(b) Determine the number of homomorphisms from the additive group Z_{15} to the additive group Z_{10} . (Z_n is the cyclic group of order n). 12

(c) State Rolle's theorem. Use it to prove that between two roots of $e^x \cos x = 1$ there will be a root of $e^x \sin x = 1$. 2+10=12

(d) Let $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{2} + 1 & \text{if } x < 1 \\ \frac{x}{2} + 1 & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ -\frac{|x|}{2} + 1 & \text{if } 2 \leq x \end{cases}$

What are the points of discontinuity of f , if any?
What are the points where f is not differentiable, if any? Justify yours answers. 12

खंड—'क'

1. निम्नलिखित में से किन्हीं पांच के उत्तर दीजिए : (12×5=60)

(क) यदि \mathbb{R} वास्तविक संख्याओं का सैट हो, और \mathbb{R}_+ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का सैट हो, दर्शाइये कि \mathbb{R} योग के अधीन $(\mathbb{R}, +)$ और \mathbb{R}_+ गुणन के अधीन (\mathbb{R}_+, \cdot) तुल्यकारी होते हैं। इसी के समान, यदि \mathbb{Q} परिमेय संख्याओं का सैट हो और \mathbb{Q}_+ धनात्मक परिमेय संख्याओं का सैट, तो क्या $(\mathbb{Q}, +)$ और (\mathbb{Q}_+, \cdot) भी तुल्यकारी हैं ? अपने उत्तर के पक्ष में दलीलें दीजिए।

4+8=12

(ख) योज्य समूह \mathbb{Z}_{15} से योज्य समूह \mathbb{Z}_{10} तक समाकारिताओं की संख्याओं का निर्धारण कीजिए। (\mathbb{Z}_n कोटि n का चक्रीय समूह है)

12

(ग) रोले के प्रमेय का कथन कीजिए। यह साबित करने के लिए कि $e^x \cos x = 1$ के दो मूलों के बीच में $e^x \sin x = 1$ का एक मूल होगा, इस प्रमेय का इस्तेमाल कीजिए।

2+10=12

(घ) लीजिए $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{2} + 1 & \text{यदि } x < 1 \\ \frac{x}{2} + 1 & \text{यदि } 1 \leq x < 2 \\ -\frac{|x|}{2} + 1 & \text{यदि } 2 \leq x \end{cases}$

f के असांतत्य के कौन से बिंदु हैं, यदि कोई हों तो ? कौन से ऐसे बिंदु हैं, जहाँ f अवकलनीय नहीं है, यदि कोई हों तो ? अपने उत्तरों के पक्ष में दलीलें दीजिए। 12

(e) Let $f(z) = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1}}{b_0 + b_1z + \dots + b_nz^n}$, $b_n \neq 0$.

Assume that the zeroes of the denominator are simple. Show that the sum of the residues of $f(z)$

at its poles is equal to $\frac{a_{n-1}}{b_n}$. 12

- (f) A paint factory produces both interior and exterior paint from two raw materials M_1 and M_2 . The basic data is as follows :

	Tons of raw material per ton of		Maximum daily availability
	Exterior paint	Interior paint	
Raw Material M_1	6	4	24
Raw Material M_2	1	2	6
Profit per ton (Rs. 1,000)	5	4	

A market survey indicates that the daily demand for interior paint cannot exceed that of exterior paint by more than 1 ton. The maximum daily demand of interior paint is 2 tons. The factory wants to determine the optimum product mix of interior and exterior paint that maximizes daily profits. Formulate the LP problem for this situation.

12

(च) लीजिए $f(z) = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1}}{b_0 + b_1z + \dots + b_nz^n}$, $b_n \neq 0$.

मानिए कि हर के शून्य सरल हैं। दर्शाइए कि $f(z)$ के अवशेषों का उसके ध्रुवों पर योग $\frac{a_{n-1}}{b_n}$ के बराबर होता है।

12

(छ) पेंट का एक कारखाना दो कच्चे मालों M_1 और M_2 से आंतरिक और बाह्य दोनों पेंटों का उत्पादन करता है। बुनियादी आंकड़े निम्नलिखित अनुसार हैं :

	प्रति टन पर कच्चे माल के टन		अधिकतम दैनिक उपलब्धता
	बाह्य पेंट	आंतरिक पेंट	
कच्चा माल M_1	6	4	24
कच्चा माल M_2	1	2	6
प्रति टन मुनाफा (1,000 रु.)	5	4	

बाज़ार सर्वेक्षण से पता चला है कि आंतरिक पेंट की दैनिक मांग, बाह्य पेंट से 1 टन से ज्यादा नहीं हो सकती है। आंतरिक पेंट की अधिकतम दैनिक मांग 2 टन है। कारखाना आंतरिक और बाह्य पेंटों के ऐसे इष्टतम उत्पाद-मिश्रण का निर्धारण करना चाहता है कि जिससे दैनिक मुनाफे अधिक से अधिक हो सकें। इस स्थिति के लिए LP समस्या का विरचन कीजिए।

12

2. (a) How many proper, non-zero ideals does the ring \mathbb{Z}_{12} have? Justify your answer. How many ideals does the ring $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{12}$ have? Why?

$$2+3+4+6=15$$

- (b) Show that the alternating group on four letters A_4 has no subgroup of order 6. 15

- (c) Show that the series :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}\right)^2 + \dots +$$

$$\left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n}\right)^2 + \dots$$

converges. 15

- (d) Show that if $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function then $f([a, b]) = [c, d]$ for some real numbers c and d , $c \leq d$. 15

3. (a) Show that $\mathbb{Z}[X]$ is a unique factorization domain that is not a principal ideal domain (\mathbb{Z} is the ring of integers). Is it possible to give an example of principal ideal domain that is not a unique factorization domain? ($\mathbb{Z}[X]$ is the ring of polynomials in the variable X with integer.) 15

2. (क) वलय Z_{12} के उचित, गैर-शून्य आदर्श कितने होते हैं ?
अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिए। वलय $Z_{12} \oplus Z_{12}$ के
कितने आदर्श होते हैं ? क्यों ? $2+3+4+6=15$

(ख) दर्शाइए कि चार अक्षरों A_4 पर एकांतर समूह का कोटि 6
का कोई उप-समूह नहीं है। 15

(ग) दर्शाइए कि श्रेणी :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6}\right)^2 + \dots +$$

$$\left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n}\right)^2 + \dots$$

अभिसरित होती है। 15

(घ) दर्शाइए कि यदि $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ एक संतत फलन हो,
तो कुछ वास्तविक संख्याओं c और d , $c \leq d$ के लिए
 $f([a, b]) = [c, d]$ । 15

3. (क) दर्शाइए कि $Z[X]$ एक ऐसा अद्वितीय गुणनखंडन प्रांत है,
जो मुख्य गुणजावली प्रांत नहीं है (Z पूर्णाकों का वलय
है)। क्या किसी ऐसे मुख्य गुणजावली प्रांत का उदाहरण
देना संभव है, जो अद्वितीय गुणनखंडन प्रांत न हो ?
($Z[X]$ पूर्णांक सहित चर X में बहुपदों का वलय है।) 15

- (b) How many elements does the quotient ring $\frac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2 + 1)}$ have? Is it an integral domain? Justify your answers. 15

- (c) Show that :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{n^4 + x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 1} .$$

Justify all steps of your answer by quoting the theorems you are using. 15

- (d) Show that a bounded infinite subset of \mathbb{R} must have a limit point. 15
4. (a) If α, β, γ are real numbers such that $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ show that :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha + \beta \cos \theta + \gamma \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}} .$$

30

- (b) Maximize : $Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$
subject to :

$$2x_1 + 3x_2 \leq 8,$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15,$$

$$2x_2 + 5x_3 \leq 10,$$

$$x_i \geq 0.$$

30

(ख) विभाग वलय $\frac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2+1)}$ के कितने अवयव होते हैं ? क्या यह एक पूर्णाकीय प्रांत है ? अपने उत्तरों के पक्ष में तर्क दीजिए। 15

(ग) दर्शाइए कि :

$$\text{Lt}_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{n^4 + x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + 1}.$$

आप जिन प्रमेयों का इस्तेमाल कर रहे हैं, उनके उद्धरण देकर, अपने उत्तर के सभी कदमों के पक्ष में दलीलें दीजिए। 15

(घ) दर्शाइए कि \mathbb{R} के परिबद्ध अनंत उपसमुच्चय का एक सीमा बिंदु होना जरूरी होता है। 15

4. (क) यदि α, β, γ ऐसी वास्तविक संख्याएं हों कि $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, तो दर्शाइए कि :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha + \beta \cos \theta + \gamma \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}}.$$

30

(ख) $Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$ को अधिकतमीकृत कीजिए, बशर्ते कि :

$$2x_1 + 3x_2 \leq 8,$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15,$$

$$2x_2 + 5x_3 \leq 10,$$

$$x_i \geq 0.$$

30

SECTION—B

5. Answer any **FIVE** of the following : (12×5=60)

(a) Show that the differential equation of all cones which have their vertex at the origin is $px + qy = z$. Verify that this equation is satisfied by the surface $yz + zx + xy = 0$. 12

(b) (i) Form the partial differential equation by eliminating the arbitrary function f given by :

$$f(x^2 + y^2, z - xy) = 0. \quad 6$$

(ii) Find the integral surface of :

$$x^2p + y^2q + z^2 = 0$$

which passes through the curve :

$$xy = x + y, z = 1. \quad 6$$

(c) (i) The equation $x^2 + ax + b = 0$ has two real roots α and β . Show that the iterative method given by :

$$x_{k+1} = -(a x_k + b)/x_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

is convergent near $x = \alpha$, if $|\alpha| > |\beta|$. 6

खंड—'ख'

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पांच के उत्तर दीजिए : (12×5=60)

(क) दर्शाइए कि उन सभी शंकुओं का, जिनके शीर्ष उद्गम पर होते हैं, अवकल समीकरण $px + qy = z$ होता है। सत्यापित कीजिए कि यह समीकरण पृष्ठ $yz + zx + xy = 0$ के द्वारा संतुष्ट होता है। 12

(ख) (i) $f(x^2 + y^2, z - xy) = 0$

के द्वारा दत्त स्वेच्छ फलन f को विलुप्त करने के द्वारा, आंशिक अवकल समीकरण बनाइए। 6

(ii) $x^2p + y^2q + z^2 = 0$

का समाकल पृष्ठ मालूम कीजिए, जो वक्र

$$xy = x + y, z = 1$$

में से गुज़रता हो। 6

(ग) (i) समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के दो वास्तविक मूल α और β हैं। दर्शाइए कि :

$$x_{k+1} = -(a x_k + b)/x_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

के द्वारा दत्त पुनरावृत्तिमूलक विधि $x = \alpha$, के निकट अभिसारी है, यदि $|\alpha| > |\beta|$. 6

- (ii) Find the values of two valued boolean variables A, B, C, D by solving the following simultaneous equations :

$$\bar{A} + AB = 0$$

$$AB = AC$$

$$AB + A\bar{C} + CD = \bar{C}D$$

where \bar{x} denotes the complement of x. 6

- (d) (i) Realize the following expression by using NAND gates only :

$$g = (\bar{a} + \bar{b} + c) \bar{d} (\bar{a} + e) f$$

where \bar{x} denotes the complement of x. 6

- (ii) Find the decimal equivalent of $(357.32)_8$. 6

- (e) The flat surface of a hemisphere of radius r is cemented to one flat surface of a cylinder of the same radius and of the same material. If the length of the cylinder be l and the total mass be m , show that the moment of inertia of the combination about the axis of the cylinder is given by :

$$mr^2 \left(\frac{l}{2} + \frac{4}{15} r \right) / \left(l + \frac{2r}{3} \right). \quad 12$$

(ii) निम्नलिखित युगपत् समीकरणों :

$$\bar{A} + AB = 0$$

$$AB = AC$$

$$AB + A\bar{C} + CD = \bar{C}D$$

को हल करने के द्वारा दो मानांकित बूलीय चरों A, B, C, D के मानों को मालूम कीजिए, जहाँ \bar{x} द्योतित करता है x के पूरक को। 6

(घ) (i) केवल 'तथा पूरक द्वारों' का इस्तेमाल करते हुए, निम्नलिखित व्यंजक का प्रापण कीजिए :

$$g = (\bar{a} + \bar{b} + c) \bar{d} (\bar{a} + e) f$$

जहाँ \bar{x} द्योतित करता है x के पूरक को। 6

(ii) $(357.32)_8$ का दशमलव तुल्य मालूम कीजिए।

6

(च) त्रिज्या r के अर्धगोले के चपटे पृष्ठ को उसी त्रिज्या और उसी पदार्थ से बने एक सिलिंडर के एक चपटे पृष्ठ के साथ चिपकाया हुआ है। यदि सिलिंडर की लंबाई l और कुल द्रव्यमान m हो, तो दर्शाइए कि संयोजन का सिलिंडर के अक्ष के इर्दगिर्द जड़त्व आघूर्ण निम्नलिखित द्वारा दत्त है :

$$mr^2 \left(\frac{l}{2} + \frac{4}{15} r \right) / \left(l + \frac{2r}{3} \right). \quad 12$$

- (f) Two sources, each of strength m are placed at the points $(-a, 0)$, $(a, 0)$ and a sink of strength $2m$ is at the origin. Show that the stream lines are the curves :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + \lambda xy)$$

where λ is a variable parameter.

Show also that the fluid speed at any point is $(2ma^2)/(r_1 r_2 r_3)$, where r_1 , r_2 and r_3 are the distances of the points from the sources and the sink.

12

6. (a) Find the characteristics of :

$$y^2 r - x^2 t = 0$$

where r and t have their usual meanings. 15

- (b) Solve :

$$(D^2 - DD' - 2D'^2)z = (2x^2 + xy - y^2) \sin xy - \cos xy$$

where D and D' represent $\frac{\partial}{\partial x}$ and $\frac{\partial}{\partial y}$. 15

- (c) A tightly stretched string has its ends fixed at $x = 0$ and $x = l$. At time $t = 0$, the string is given a shape defined by $f(x) = \mu x(l - x)$, where μ is a constant, and then released. Find the displacement of any point x of the string at time $t > 0$. 30

(छ) दो स्रोतों को, प्रत्येक m सामर्थ्य का, बिंदुओं $(-a, 0)$, $(a, 0)$ पर रखा हुआ है और सामर्थ्य $2m$ का एक सिंक उद्गम पर स्थापित है। दर्शाइए कि धारा रेखाएं वक्र हैं :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + \lambda xy)$$

जहाँ λ एक परिवर्ती प्राचल है।

यह भी दर्शाइए कि किसी भी बिंदु पर तरल रफ्तार $(2ma^2)/(r_1 r_2 r_3)$ है, जहाँ r_1, r_2 और r_3 स्रोतों और सिंक से बिंदुओं की दूरियां हैं। 12

6. (क) $y^2 r - x^2 t = 0$

के अभिलक्षण मालूम कीजिए जहाँ r और t के अपने सामान्य अर्थ हैं। 15

(ख) हल कीजिए :

$$(D^2 - DD' - 2D'^2)z = (2x^2 + xy - y^2) \sin xy - \cos xy$$

जहाँ D और D' निरूपित करते हैं $\frac{\partial}{\partial x}$ और $\frac{\partial}{\partial y}$ को। 15

(ग) मजबूती के साथ खिंचे हुए एक रज्जू के सिरे $x = 0$ और $x = l$ पर जुड़े हुए हैं। समय $t = 0$ पर, रज्जू को $f(x) = \mu x(l - x)$ के द्वारा परिभाषित आकृति दी जाती है, जहाँ μ एक नियतांक है और उसके बाद रज्जू को ढीला छोड़ा जाता है। समय $t > 0$ पर रज्जू के किसी भी बिंदु x का विस्थापन मालूम कीजिए। 30

7. (a) Develop an algorithm for Regula-Falsi method to find a root of $f(x) = 0$ starting with two initial iterates x_0 and x_1 to the root such that $\text{sign}(f(x_0)) \neq \text{sign}(f(x_1))$. Take n as the maximum number of iterations allowed and eps be the prescribed error. 30

- (b) Using Lagrange interpolation formula, calculate the value of $f(3)$ from the following table of values of x and $f(x)$:

x	0	1	2	4	5	6
f(x)	1	14	15	5	6	19

15

- (c) Find the value of $y(1.2)$ using Runge-Kutta fourth order method with step size $h = 0.2$ from the initial value problem :

$$y' = xy$$

$$y(1) = 2.$$

15

8. (a) A perfectly rough sphere of mass m and radius b , rests on the lowest point of a fixed spherical cavity of radius a . To the highest point of the movable sphere is attached a particle of mass m' and the

7. (क) मूल पर दो आरंभिक पुनरावृत्तों x_0 और x_1 से शुरू करते हुए, $f(x) = 0$ का एक मूल मालूम करने के लिए, मिथ्या स्थिति (रिगुला-फाल्सी) विधि के लिए, एक ऐल्गोरिथ्म का विकास कीजिए, ताकि साइन $(f(x_0)) \neq$ साइन $(f(x_1))$ । लीजिए n अनुमत्य पुनरावृत्तियों की अधिकतम संख्या और ϵ निर्धारित त्रुटि। 30

- (ख) लग्रांज अंतर्वेशन फार्मूला का इस्तेमाल करते हुए, x और $f(x)$ के मानों की निम्नलिखित सारणी से, $f(3)$ के मान का परिकलन कीजिए :

x	0	1	2	4	5	6
$f(x)$	1	14	15	5	6	19

15

- (ग) आरंभिक मान समस्या :

$$y' = xy$$

$$y(1) = 2$$

से पग आकार $h = 0.2$ के साथ रंगे-कुट्टा चतुष्कोटि विधि का इस्तेमाल करते हुए, $y(1.2)$ का मान मालूम कीजिए। 15

8. (क) द्रव्यमान m और त्रिज्या b का एक पूर्णतः खुरदरा गोलक, त्रिज्या a के एक नियत गोलाकार कोटर के निम्नतम बिंदु पर टिका हुआ है। गतिशील गोलक के उच्चतम बिंदु पर

system is disturbed. Show that the oscillations are the same as those of a simple pendulum of length

$$(a - b) \frac{4m' + \frac{7}{5}m}{m + m' \left(2 - \frac{a}{b} \right)} . \quad 30$$

(b) An infinite mass of fluid is acted on by a force

$\frac{\mu}{r^{3/2}}$ per unit mass directed to the origin. If initially the fluid is at rest and there is a cavity in the form of the sphere $r = C$ in it, show that the cavity will

be filled up after an interval of time $\left(\frac{2}{5\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot C^{\frac{5}{4}}$.

30

द्रव्यमान m' का एक कण जुड़ा हुआ है। तंत्र को हिलाया जाता है। दर्शाइए कि दोलन वही हैं, जो लंबाई

$$(a - b) \frac{4m' + \frac{7}{5}m}{m + m' \left(2 - \frac{a}{b}\right)} \text{ के सरल लोलक के हुआ}$$

करते हैं।

30

(ख) तरल की एक अपरिमित संहति पर, प्रति इकाई संहति, बल

$\frac{\mu}{r^{3/2}}$ लगा हुआ है, जिसकी दिशा उद्गम की ओर है।

यदि आरंभ में तरल विरामावस्था में हो और उसमें गोलक $r = C$ के रूप में एक कोटर हो, तो दर्शाइए कि समय

$\left(\frac{2}{5\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot C^{\frac{5}{4}}$ के अंतराल के बाद कोटर भर जाएगा।

30

Serial No.

C-DTN-J-NUB

गणित

प्रश्न-पत्र—II

समय : तीन घण्टे

पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है। प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं दिये जाएंगे।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

यदि आवश्यक हो तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीकों और संकेतनों के प्रचलित अर्थ हैं, जब तक अन्यथा न कहा गया हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.